СТЕРЕОМЕТРИЯ

СЕЧЕНИЯ

Существуют специальные методы построения сечений многогранников. Наиболее эффективными в школьном курсе геометрии являются следующие три метода: 1) метод следов; 2) метод внутреннего проектирования; 3) комбинированный метод. Рассмотрим каждый из них на примерах.

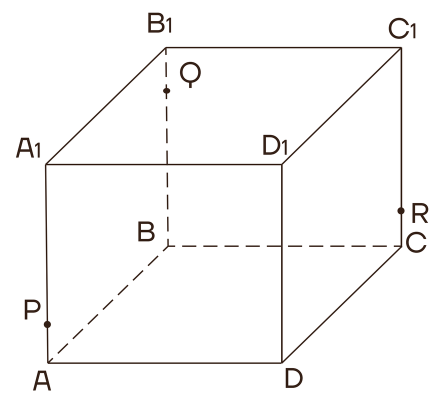
Метод следов

Прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость основания многогранника, называется следом плоскости α в плоскости этого основания.

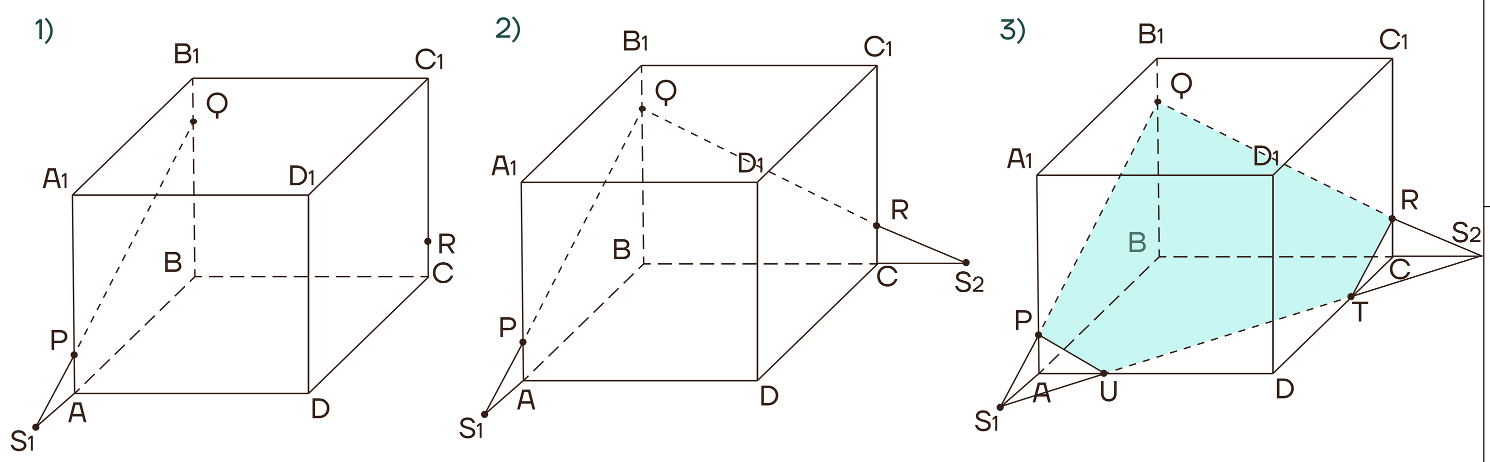
Из определения следа получаем: в каждой его точке пересекаются прямые, одна из которых лежит в секущей плоскости, другая - в плоскости основания. Именно это свойство следа используют при построении плоских сечений многогранников методом следов. Причем в секущей плоскости удобно использовать такие прямые, которые пересекают ребра многогранника.

Пример №1

Построить сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, Q, R (точки указаны на рисунке)



Решение:



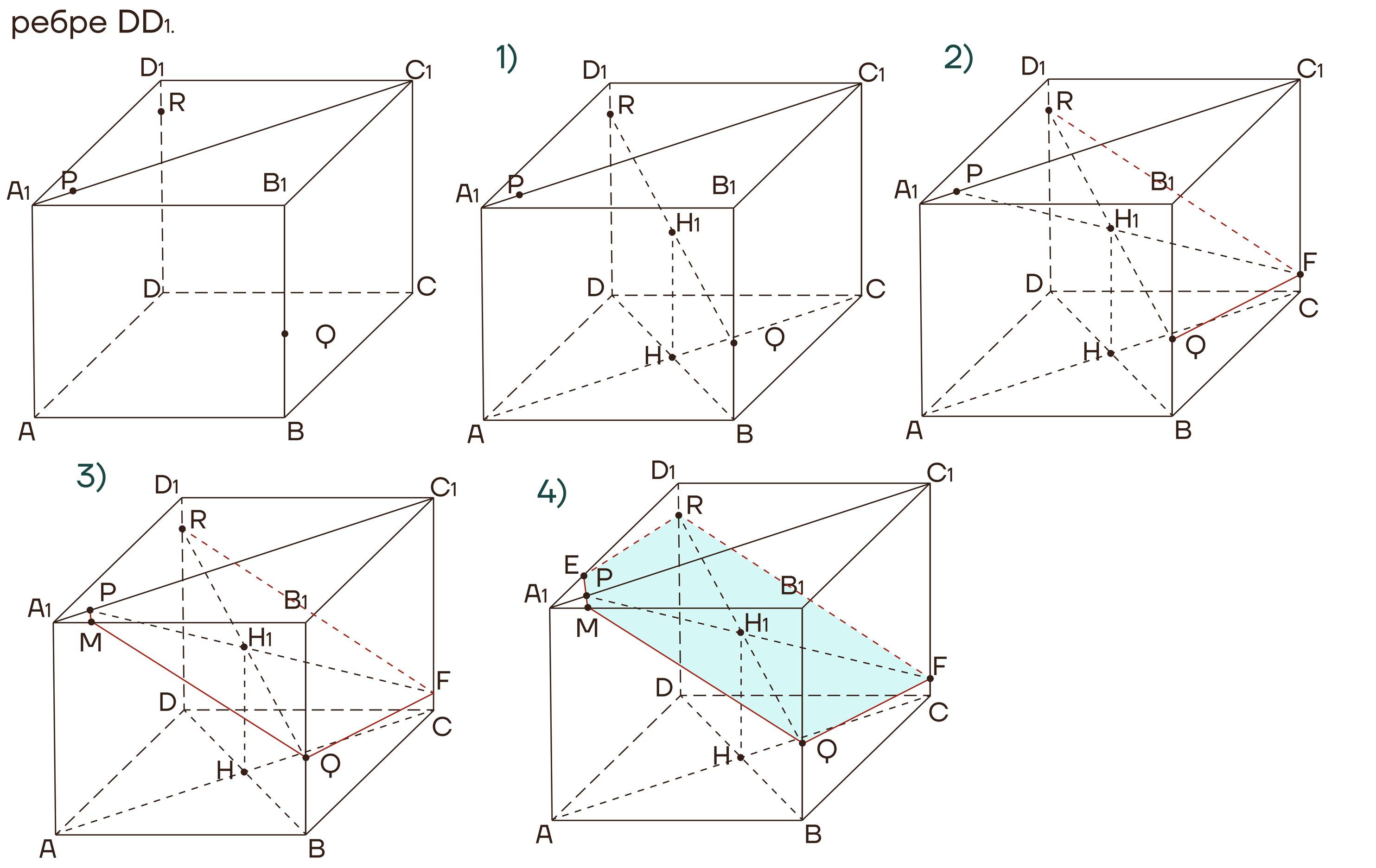
1) Построим след секущей плоскости на плоскость нижнего основания призмы. Рассмотрим грань AA_1B_1B. В этой грани лежат точки сечения P и Q.
Проведем прямую PQ.
Продолжим прямую PQ, которая принадлежит сечению, до пересечения с прямой AB. Получим точку S_1, принадлежащую следу.
2) Аналогично получаем точку S_2 пересечением прямых QR и BC.
3) Прямая S_1S_2 - след секущей плоскости на плоскость нижнего основания призмы. Прямая S_1S_2 пересекает сторону AD в точке U, сторону CD - в точке T. Соединим точки P и U, так как они лежат в одной плоскости грани AA_1D_1D. Аналогично получаем TU и RT.
PQRTU – искомое сечение.

Метод внутреннего проектирования

Метод вспомогательных сечений построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь ввиду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются “скученными”. Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

Пример №1

Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, заданной точками P, Q, и R, если точка P лежит на диагонали A_1C_1, точка Q- на ребре BB_1 и точка R- на ребре DD_1.

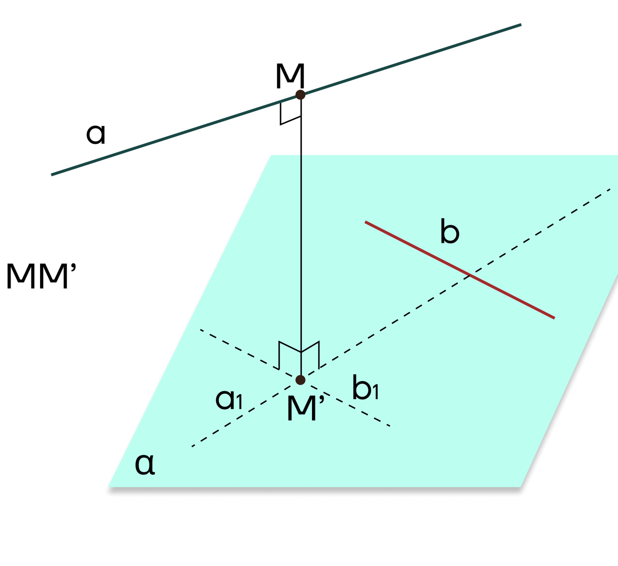


Решение.
1) Пусть H- точка пересечения диагоналей AC и BD. Соедения R и RQ. Проведя прямую HH_1 параллельно ребру BB_1 ($H_1 \in RQ$),
2) Через точку H_1 от P пустим линию на CC_1. Назовем ее F. Точка F - это точка пересечения секущей плоскости с ребром CC_1. Точка прямая RF - это прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани CC_1D_1D, прямая QF- это прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость грани BCC_1B_1.
3) Так как плоскость ABB_1 параллельна плоскости CDD_1, то секущая плоскость пересекает грань ABB_1A_1 по прямой QM ($M \in A_1B_1$) , параллельной прямой FR.
4) Далее, если E - точка пересечения прямых MP и A_1D_1, то эта точка является точкой пересечения секущей плоскости и ребра A_1D_1.
Пятиугольник ERFQM- искомое сечение.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

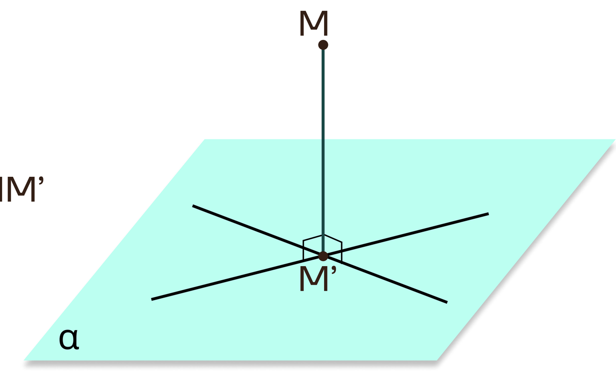
Скрещивающиеся прямые — прямые, которые не лежат в одной плоскости.
Расстояние между скрещивающимися прямыми - это расстояние от некоторой точки одной из скрещивающихся прямых до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой прямой.

p(a; b) = MM’



Так как через вторую прямую проводится плоскость α, параллельная первой, то искомое расстояние по итогу равно расстоянию от любой удобной точки на прямой а до плоскости α.

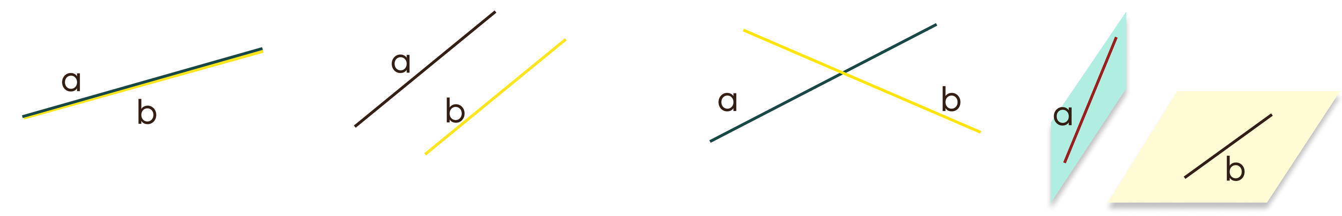
p(M; α) = MM’



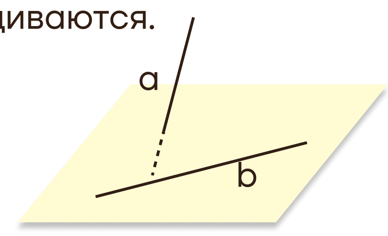
Угол между прямыми

Угол между прямыми - это такой угол α, что 0 ≤ α ≤ 90°.

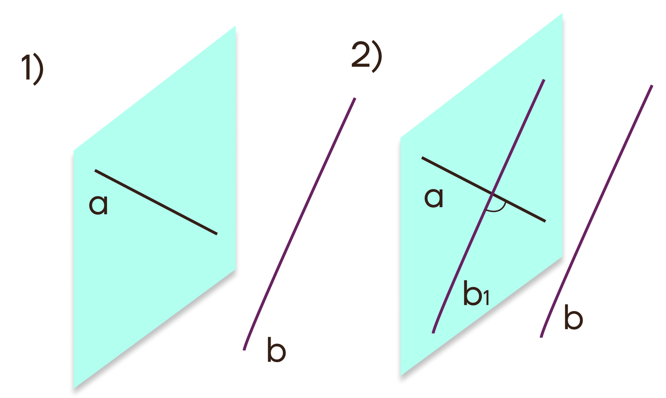
В пространстве существует 4 типа взаимного расположения прямых: совпадают, пересекаются, параллельны, скрещиваются.



Скрещивающиеся прямые – это прямые, через которые нельзя провести одну плоскость.
Признак скрещивающихся прямых: если первая прямая пересекает плоскость, в которой лежит вторая прямая, в точке, не лежащей на второй прямой, то такие прямые скрещиваются.

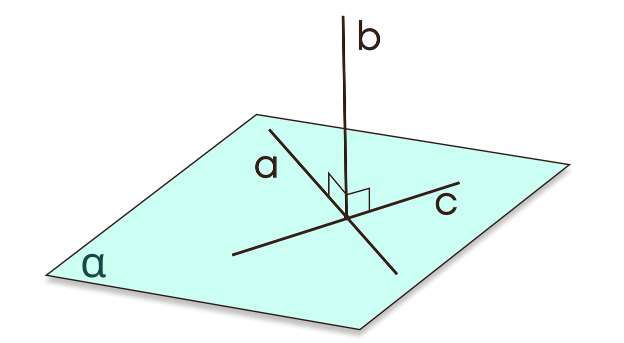


Алгоритм нахождения угла между прямыми:
1) Через одну из двух прямых провести плоскость, параллельную второй прямой (прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой из этой плоскости);
2) В этой плоскости построить (перенести) прямую b_1, параллельную прямой b. По сути мы совершаем параллельный перенос;
3) Тогда угол между прямыми a и b будет равен углу между прямыми a и b_1.



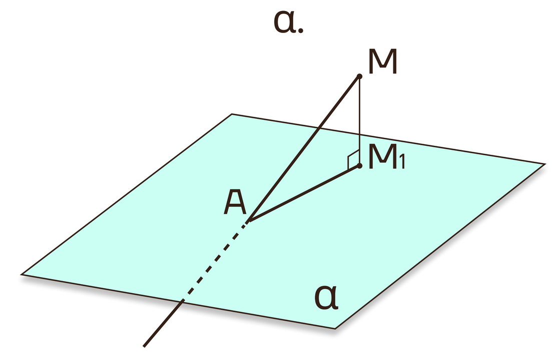
Перпендикулярность прямой и плоскости

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.



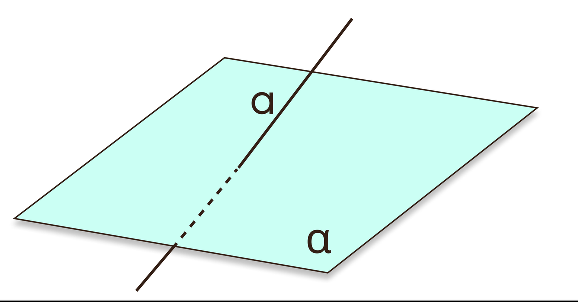
Проекция прямой на плоскость

Проекцией прямой на плоскость α называют множество проекций всех точек прямой на плоскость α.



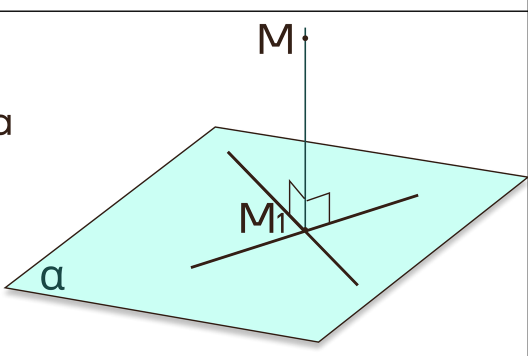
Пересечение прямой и плоскости

Прямая и плоскость пересекаются, если они имеют одну-единственную общую точку, которую называют точкой пересечения прямой и плоскости.



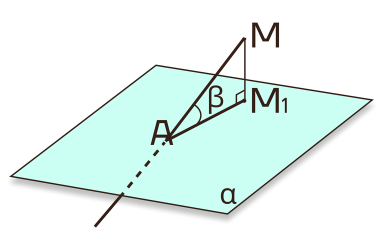
Проекция точки M на плоскость

Проекцией точки M на плоскость α называется точка пересечения плоскости α и прямой, перпендикулярной к плоскости α и проходящей через точку M, если точка M не лежит в плоскости α.



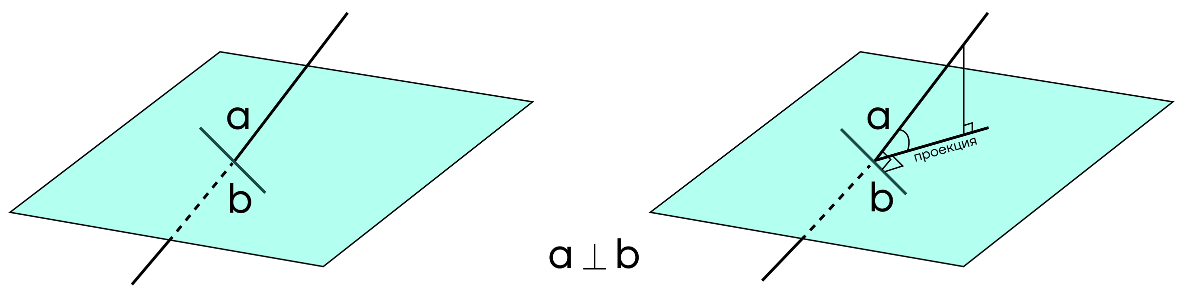
Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, - это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Теорема о трех перпендикулярах

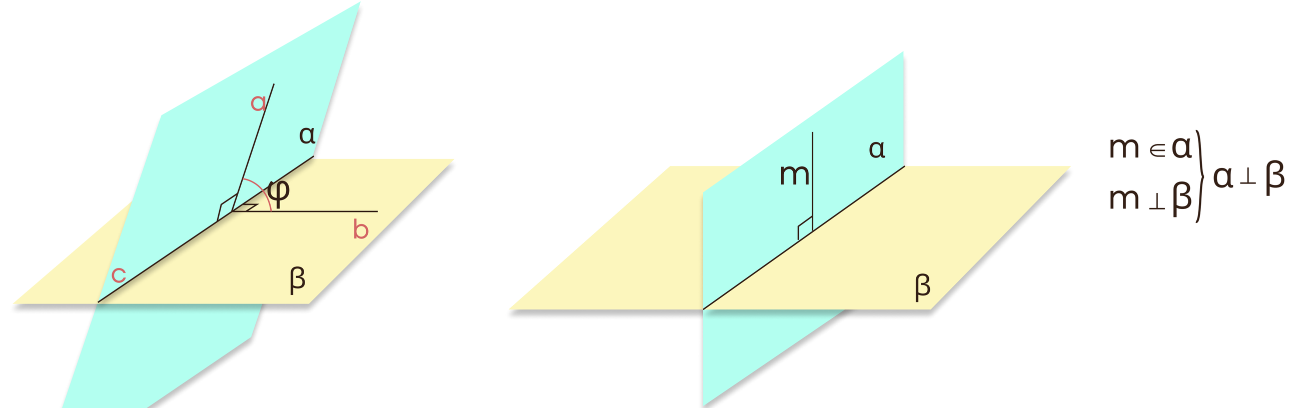
Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.
Теорема о трех перпендикулярах.
Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.



a ⊥ b

Угол между плоскостями

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами, проведенными в этих плоскостях, к линии их пересечения.
Двугранный угол – угол, образованный двумя полуплоскостями и прямой а, которая является их общей границей.
Алгоритм поиска угла между плоскостями:
1) В плоскости α проводим прямую a, перпендикулярную c, где c - прямая, образованная пересечением двух плоскостей.
2) В плоскости β проводим прямую b, также перпендикулярную c.
3) Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b. Находим его через синус, косинус, тангенс, с помощью теоремы косинусов или другими удобными для конкретного случая методами.



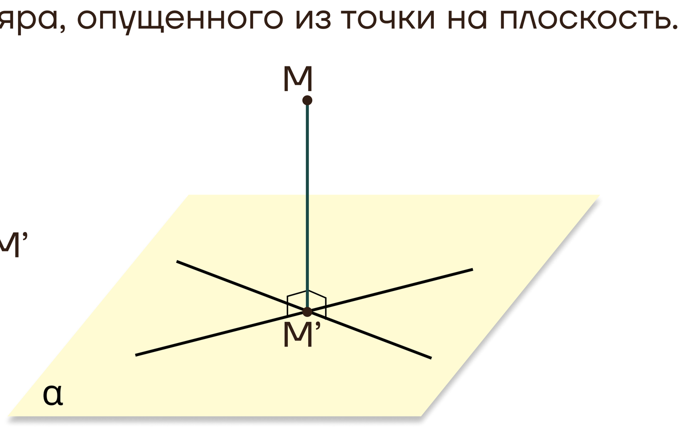
$\left.\begin{matrix} m \in \alpha \\ m \perp \beta \end{matrix}\right\} \alpha \perp \beta$

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

Расстояние от точки до прямой и до плоскости

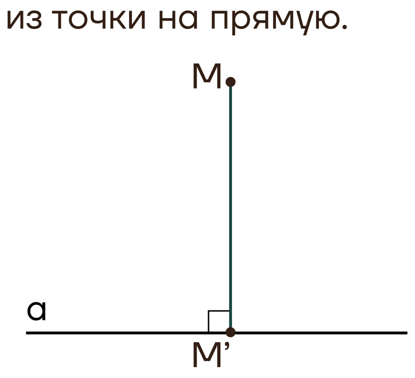
Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

p(M; α) = MM’



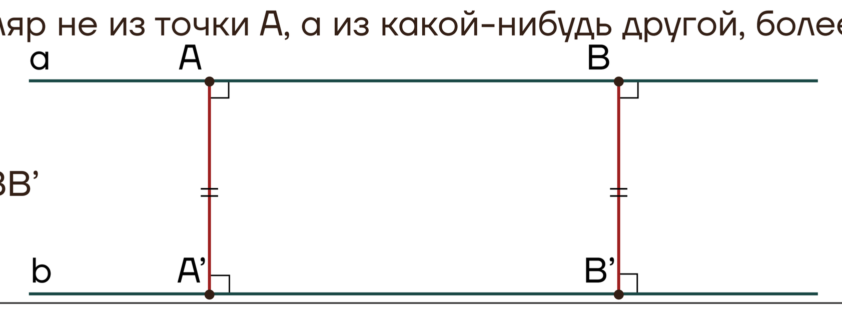
Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

p(M; a) = MM’



Расстояние между параллельными прямыми - это длина перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой ко второй прямой.
Иногда логичнее опускать перпендикуляр не из точки A, а из какой-нибудь другой, более удобной точки на прямой a.

p(a; b) = AA’ = BB’



Метод объемов

Пример. Дан куб с ребром, равным 1. Найдите расстояние между DC_1 и AC.
Решение. Через прямую AC проведем плоскость, параллельную прямой DC_1. Проведем прямую AB_1, параллельную прямой DC_1. Далее соединяем точки AB_1C. Расстояние от прямой DC_1 до прямой AC будет равно расстоянию от точки D до плоскости AB_1C.
Тогда выразим объем пирамиды B_1ADC, так как ребро куба равно 1, получаем:
$V = (S_{ADC} \cdot BB_1)/3 = (0,5 \cdot 1)/3 = 1/6$
Проведем от точки D до плоскости AB_1C высоту h. В таком случае для поиска объема пирамиды AB_1CD через высоту h нам необходимо узнать еще и площадь треугольника AB_1C. AB_1C - правильный треугольник со стороной $\sqrt{2}$. Тогда площадь мы можем найти, как $(\sqrt{2})^2/2 \cdot \sin(60°) = \sqrt{3}/2$.
Приравниваем объемы, умноженные на 3, получаем: $\sqrt{3}/2 \cdot h = 1/2$
$h = 1/\sqrt{3}$. Ответ: $1/\sqrt{3}$.