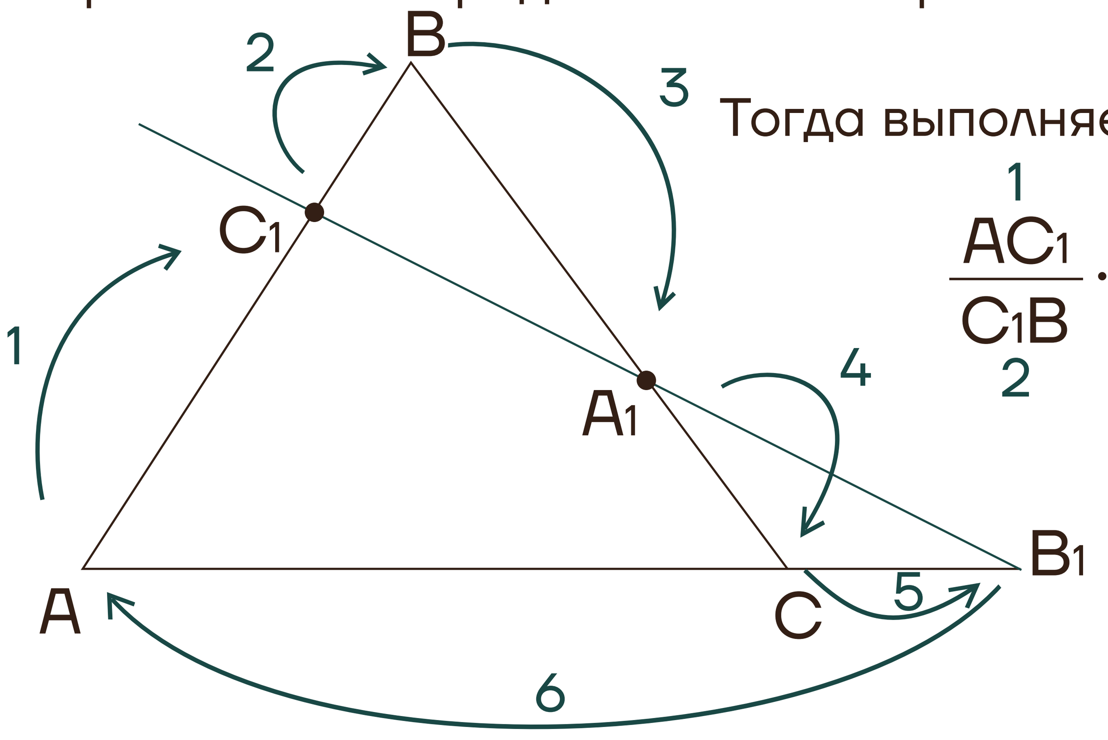
Планиметрия

Планиметрия
Теорема Менелая

Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, и B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC.



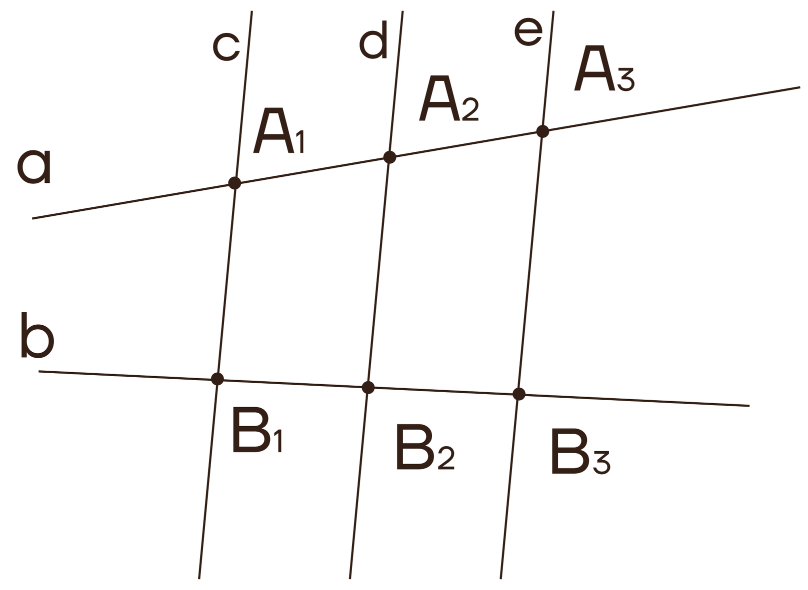
Тогда выполняется равенство:

$$\frac{\overset{1}{AC_1}}{\underset{2}{C_1B}}\cdot\frac{\overset{3}{BA_1}}{\underset{4}{A_1C}}\cdot\frac{\overset{5}{CB_1}}{\underset{6}{B_1A}}=1$$

Обобщённая теорема Фалеса

Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$$



Обратная теорема Фалеса

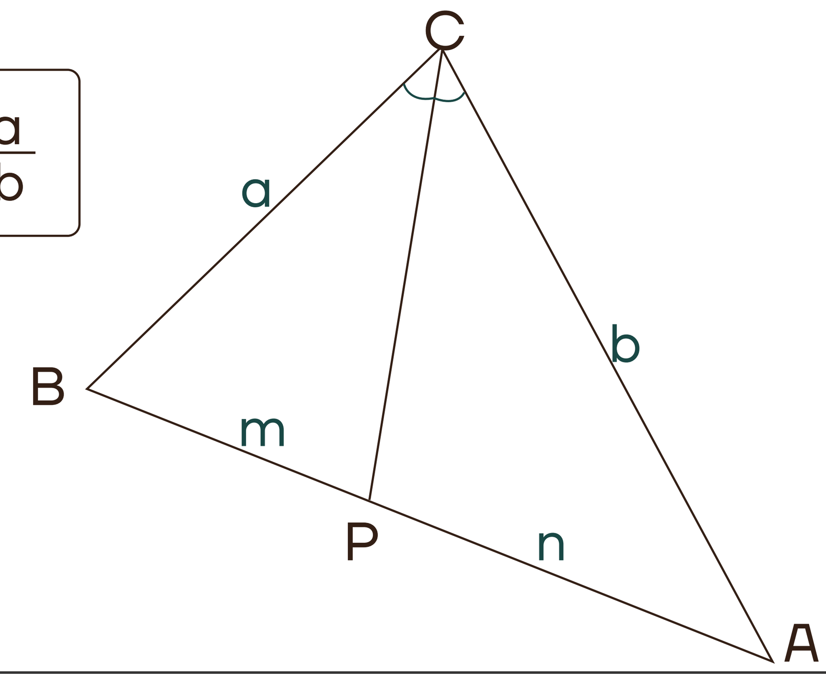
Если прямые, пересекающие две другие прямые, отсекают на обеих из них равные (или пропорциональные) между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.

Если $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$, то $c \parallel d \parallel e$

Свойство биссектрисы

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон.

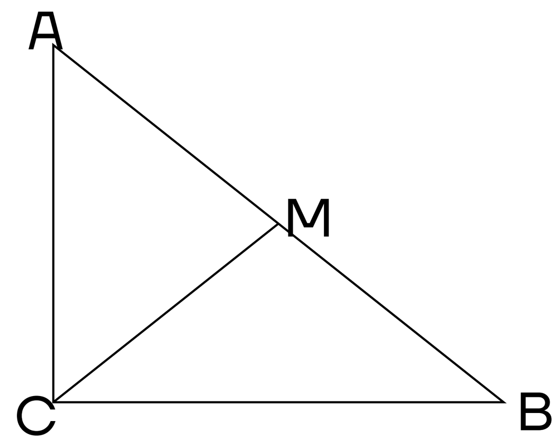
$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$$



Медиана в прямоугольном треугольнике

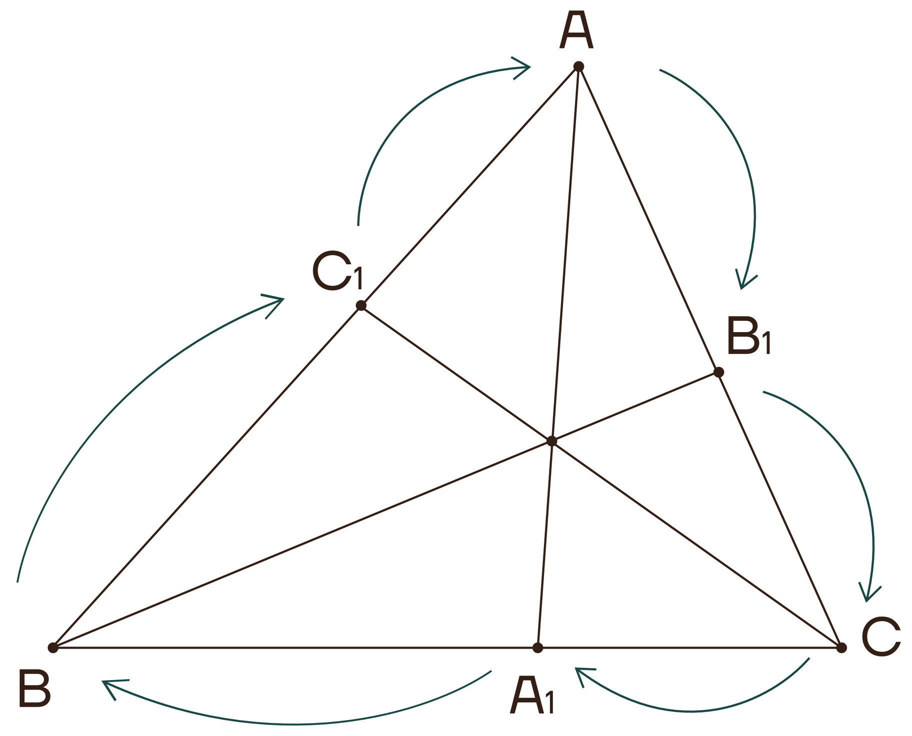
Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы

$$CM=\frac{AB}{2}$$



Теорема Чевы

Пусть на прямых AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

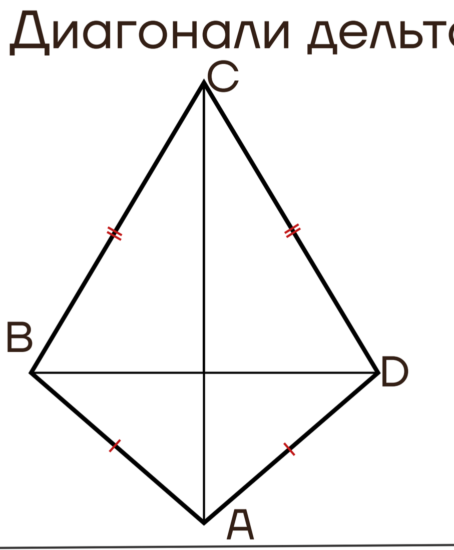


$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

Чевиана - это отрезок в треугольнике, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.
Прелесть данной теоремы в том, что мы можем доказывать пересечение отрезков в треугольнике.

Дельтоид

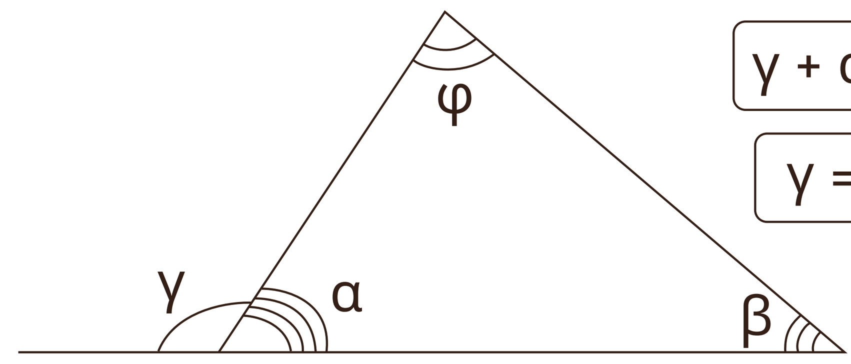
Дельтоид - четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.
Диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны.



$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = CD \end{cases} \longrightarrow \text{Дельтоид}$$

Внешний угол

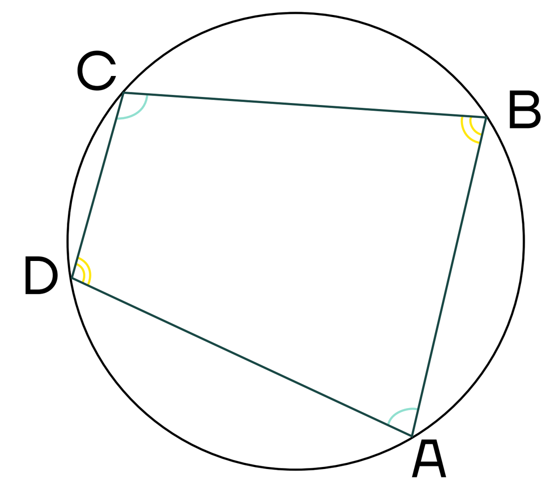
Внешний угол треугольника — это угол, смежный с любым из внутренних углов треугольника.
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.



$$\gamma + \alpha = 180°$$
$$\gamma = \varphi + \beta$$

Признак вписанного четырёхугольника

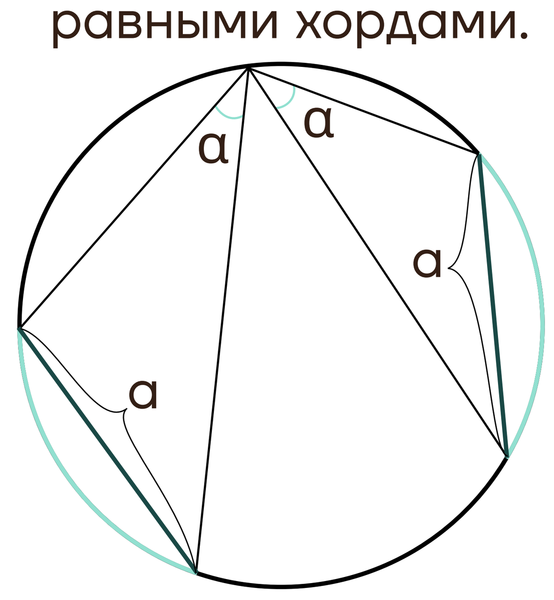
Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то этот четырёх - угольник вписанный.



$$\angle C + \angle A = 180°$$
$$\angle D + \angle B = 180°$$

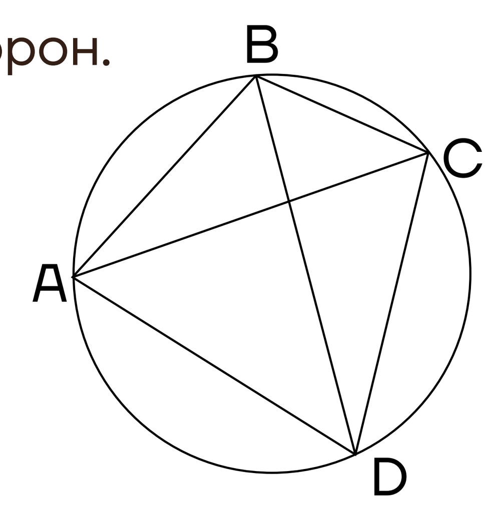
Равные хорды

В одной окружности или в равных окружностях равные дуги стягиваются равными хордами.



Теорема Птолемея

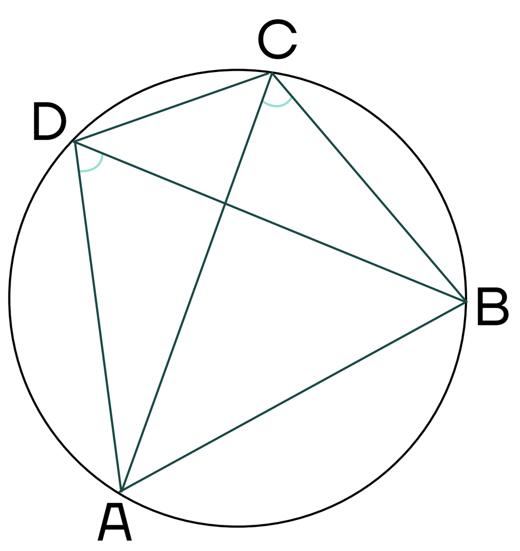
Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.



$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

Условие принадлежности четырёх точек одной окружности

Если точки D и C лежат по одну сторону от прямой AB и $\angle ADB = \angle ACB$, то A, B, C, D лежат на одной окружности.

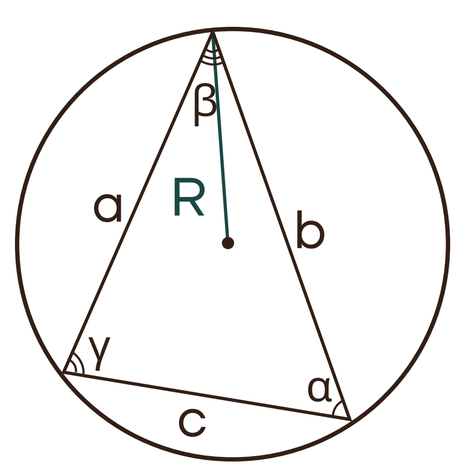


Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\gamma}=\frac{c}{\sin\beta}=2R$$

где R - радиус описанной около треугольника окружности.



Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\gamma$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos\beta$$